

BMS, Gymnasium, FMS, WMS/IMS
Aufnahmeprüfung Mathematik 2020

Lösungsschlüssel

Hinweise zur Korrektur:

- Lösungen sind **rot**, Punktevergabe **grün** gekennzeichnet
- Die maximale Punktezahl ist bei jeder Aufgabe beim Endresultat aufgeführt
→ z.B. (3P/____P), Punktemaximum 67 Punkte
- Punkte für richtige Teilresultate sind mit dem entsprechenden Vermerk aufgeführt
- Es werden nur ganze Punkte vergeben
- Richtige Endresultate ergeben prinzipiell die volle Punktzahl. Ist ein richtiges Endresultat nachweislich aufgrund falscher Lösungsschritte entstanden, erfolgt ein entsprechender Abzug bei der Punktevergabe
- Folgefehler ergeben keinen weiteren Abzug, falls die Aufgabe sich dadurch nicht wesentlich vereinfacht
- Fehlende Masseinheiten ergeben keinen Abzug
- Das Bewerten von Lösungswegen, welche nicht im Lösungsschlüssel aufgeführt sind, erfolgt nach Absprache unter den Mitgliedern des Korrekturteams vor Ort, analog der Vorgabe.

A. Bruchrechnen

▷ Bewertung: Taschenrechnerlösungen ohne Lösungswege sind bei Aufgabe 1 und 2 auch zulässig!

1. Stelle das Resultat als **gekürzten gewöhnlichen Bruch** (z.B. $\frac{3}{7}$) oder als **Dezimalbruch** (z.B. 0,38) dar.

a) $\frac{3}{14} - 4 - \frac{2}{5} + 5 = \frac{70}{70} + \frac{15}{70} - \frac{28}{70} = \frac{57}{70}$ oder = **0,81**

(1P/____P)

1 Punkt für das richtige Resultat

b) $3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} \right) - 8 = 3 \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{2} \right) - 8 = \frac{1}{2}$ oder = **0,5**

(2P/____P)

1 Punkt für das richtige Kürzen in der Klammer, falls das Resultat falsch ist

c) $\frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\frac{16-15}{20}}{\frac{4-3}{6}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{20} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{9}{25}$ oder = **0,36**

(2P/____P)

1 Punkt für das richtige Zusammenfassen von Zähler oder Nenner oder für die Multiplikation mit dem Kehrwert, falls das Resultat falsch ist

2. Schreibe folgende Dezimalbrüche als **gekürzte gewöhnliche Brüche**.

a) $0,375 = \frac{3}{8}$

(1P/____P)

1 Punkt für das richtige Resultat

b) $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$

(1P/____P)

1 Punkt für das richtige Resultat

B. ALGEBRA / ANWENDUNGEN

▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.
Die Endresultate sind doppelt zu unterstreichen!

3. Berechne und vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

a) Berechne und vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

$$2a - (-(2a + b) + 2b) - (-a + b) = 2a - (-2a - b + 2b) + a - b = 5a - 2b$$

(2P/____P)

1 Punkt für das richtige Auflösen der beiden inneren Klammern

1 Punkt für das richtige Endresultat

b) Multipliziere den Term aus und fasse soweit wie möglich zusammen:

$$(2x + 7y)^2 = 4x^2 + 28xy + 49y^2$$

(2P/____P)

1 richtiger Term → 0 Punkte

2 richtige Terme → 1 Punkt

3 richtige Terme → 2 Punkte

c) Zerlege unter Verwendung der binomischen Formel in Faktoren:

$$9e^2 - 64f^2 = (3e - 8f)(3e + 8f)$$

1 Punkt für das richtige Resultat

(1P/____P)

4. Vereinfache und kürze die folgenden Terme a) – c) so weit wie möglich:

a) $\frac{x^{-5} x^8}{x^3 x^{-11}} = x^{-5+8-3+11} = x^{11}$ oder $\frac{x^{-5+8}}{x^{3-11}} = \frac{x^3}{x^{-8}} = x^{3+8} = x^{11}$

(2P/____P)

1 Punkt für eine korrekte Anwendung eines Potenzgesetzes

1 Punkt für korrektes Zusammenfassen

b) $\frac{3a}{a^2-b^2} - \frac{3}{a+b} = \frac{3a-3(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{3a-3a+3b}{(a-b)(a+b)} = \frac{3b}{(a-b)(a+b)}$
oder $\frac{3b}{a^2-b^2}$

(2P/____P)

1 Punkt Hauptnenner und korrektes Erweitern

1 Punkt korrektes Zusammenfassen

c) $\frac{2y-3}{y^2+8y+15} : \frac{12y-18}{y+5} = \frac{(2y-3)(y+5)}{(y+3)(y+5)6(2y-3)} = \frac{1}{6(y+3)}$ oder $= \frac{1}{6y+18}$

(3P/____P)

1 Punkt Faktorisieren

1 Punkt korrektes Kürzen

1 Punkt korrektes Zusammenfassen

d) Bestimme x:

$$8^{-3} \cdot (8^9)^4 = 8^x \Rightarrow 8^{-3} \cdot 8^{36} = 8^x \Rightarrow 8^{-3+36} = 8^x \Rightarrow x = 33$$

(2P/____P)

1 Punkt für die korrekte Multiplikation der Exponenten $9 \cdot 4 = 36$

1 Punkt korrektes Zusammenfassen

5. Gegeben sei die folgende Formel: $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

a) Welchen Wert bekommst Du für **V**, wenn $h = 5,5$ cm und $r = 8$ cm betragen?

V = ?

1 Punkt korrektes Übertragen der Werte in die Formel

1 Punkt für das richtige Resultat

Fehlende Einheit: kein Abzug!

$$V = 737,23 \text{ cm}^2$$

(2P/____P)

b) Forme die Formel $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ nach **h** um:

h = ?

$$h = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

1 Punkt Multiplikation mit 3

1 Punkt Division mit $2 \cdot \pi \cdot r^2$

(2P/____P)

6. Löse die nachfolgenden Gleichungen nach **x** auf und berechne den Wert von **x**:

a) $4(3x - 6) - 3x = 7 - (4x - 8)$

$$12x - 24 - 3x = 7 - 4x + 8$$

$$9x - 24 = 15 - 4x \Rightarrow 13x = 39 \Rightarrow x = 3$$

(3P/____P)

1 Punkt korrektes Auflösen für eine der beiden Klammern

1 Punkt korrektes Zusammenfassen

1 Punkt richtiges Endresultat

b) $6(4x - (5 + x)) + x = 12x - 44$

$$6(4x - 5 - x) + x = 12x - 44$$

$$6(3x - 5) + x = 12x - 44$$

$$18x - 30 + x = 12x - 44 \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -2$$

(3P/____P)

1 Punkt korrektes Auflösen der inneren Klammer

1 Punkt korrektes Ausmultiplizieren und der äusseren Klammer

1 Punkt richtiges Endresultat

7. Berechne x und y für das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I.} & 9x - 8y = 25 & | \cdot 2 & 18x - 16y = 50 \\
 \text{II.} & 6x + 13y = -20 & | \cdot (-3) & -18x - 39y = 60 \\
 & & & -55y = 110 \\
 & & & \Rightarrow \underline{\underline{y = -2}} \\
 & & & \Rightarrow 9x - 8 \cdot (-2) = 25 \Rightarrow 9x = 9 \\
 & & & \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}
 \end{array}$$

2 Punkte Ansatz Lösungsverfahren

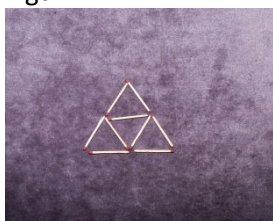
1 Punkt korrekter x-Wert

1 Punkt korrekter y-Wert

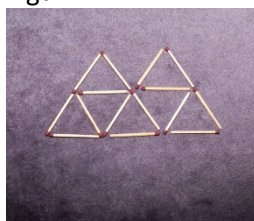
(4P/____P)

8. Mit Streichhölzern werden verschiedene Figuren gemäss den Abbildungen gelegt:

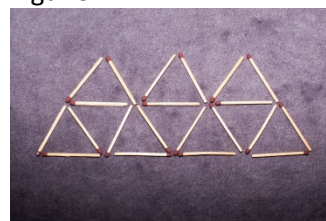
Figur 1



Figur 2



Figur 3



a) Notiere in der Tabelle die Anzahl Hölzchen für die Figur 7.

(1P/____P)

b) Notiere in der Tabelle: Wie heisst der Term für die allgemeine Figur n?

(1P/____P)

Figur	1	2	3	...	7	n
Anzahl Hölzchen	9	15	21	...	45	6n + 3

Je 1 Punkt pro richtig ausgefülltes Kästchen

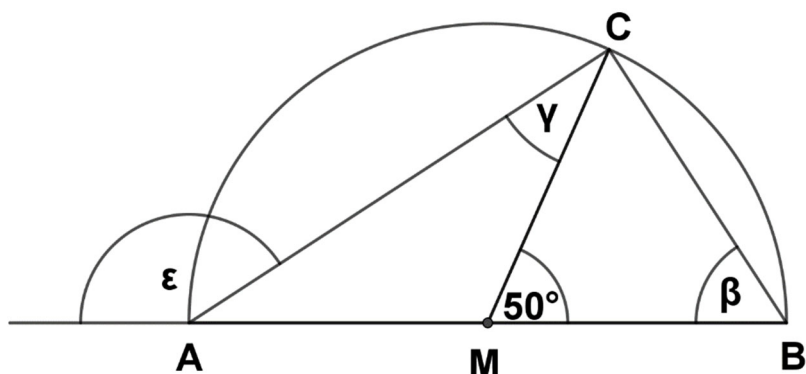
C. GEOMETRIE

▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.
Die Endresultate sind doppelt zu unterstreichen!
Die Skizzen sind nicht massstabsgetreu gezeichnet!

9. Die Strecke AB ist der Durchmesser des Halbkreises mit dem Zentrum M.
Der Punkt C liegt auf dem Bogen des Halbkreises.

Berechne:

- a) den Winkel $\beta =$ _____ $\beta = 65^\circ$ (1P/___P)
- b) den Winkel $\gamma =$ _____ $\gamma = 25^\circ$ (1P/___P)
- c) den Winkel $\epsilon =$ _____ $\epsilon = 155^\circ$ (1P/___P)

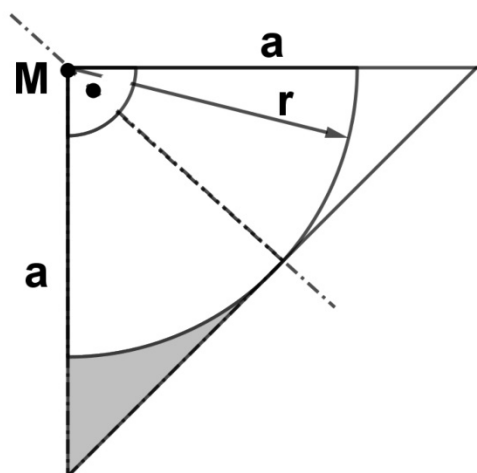


1 Punkt für die Berechnung von $\beta = 65^\circ$
1 Punkt für die Berechnung von $\gamma = 25^\circ$
1 Punkt für die Berechnung von $\epsilon = 155^\circ$

10. Einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck wird ein Kreissektor mit Kreismittelpunkt M und Radius r gemäss Skizze einbeschrieben.

Berechne den Inhalt der grauen Fläche, wenn der Radius $r = 5$ cm beträgt.

(3P/___P)



$$\begin{aligned} \text{Fläche } A &= A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Viertelkreis}} \\ &= \frac{g \cdot h}{2} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{5^2 \cdot \pi}{8} = 12,5 - 9,8175 \\ &= \underline{\underline{2,68 \text{ cm}^2}} \end{aligned}$$

1 Punkt pro Teilfläche ($A_{\text{Dreieck}} / A_{\text{Viertelkreis}}$)
1 Punkt für die korrekte Fläche
Fehlende Einheit: kein Abzug!

11. Die untenstehende Figur zeigt die Abwicklung (das Netz) eines Quaders.

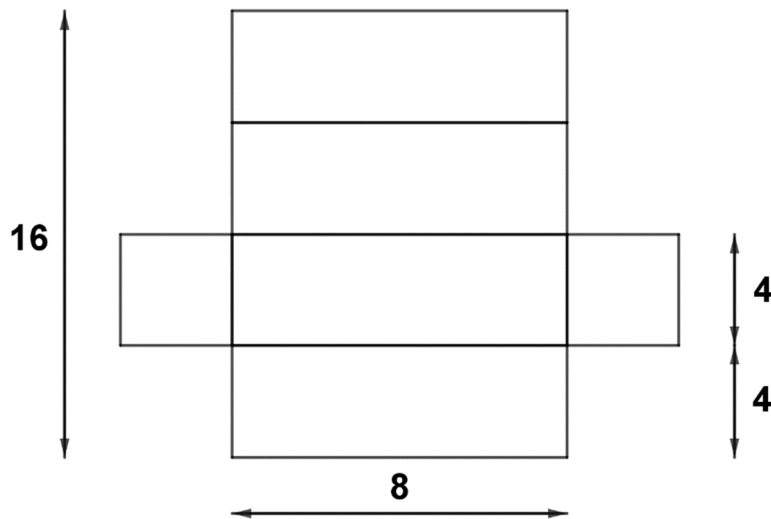
Berechne (alle Maße sind in cm angegeben):

a) die Oberfläche des Körpers.

(1P/___P)

b) das Volumen des Körpers.

(1P/___P)



$$O = 8 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 160 \text{ cm}^2$$

$$V = 8 \cdot 4 \cdot 4 = 128 \text{ cm}^3$$

1 Punkt für die Oberfläche
1 Punkt für das Volumen
Fehlende Einheit: kein Abzug!

12. Ein Quader besitzt eine quadratische Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt $a = 10$ cm, die Höhe des Quaders beträgt $h = 15$ cm.

Berechne die Raumdiagonale des Quaders. (2P/___P)

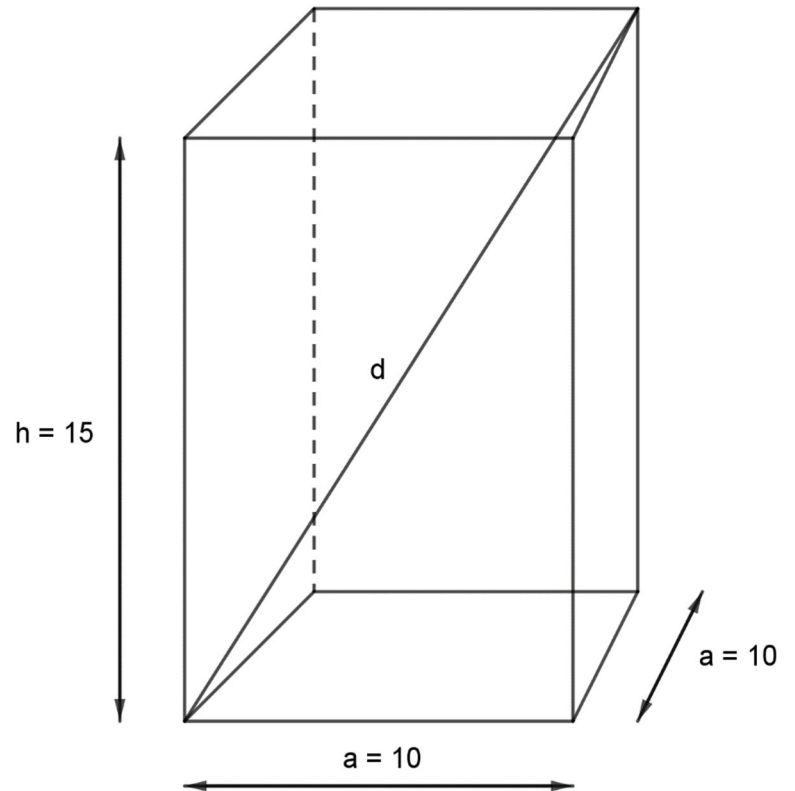
Diagonale der Grundfläche

$$d_1 = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10 \cdot \sqrt{2} = \mathbf{14.14 \text{ cm}}$$

$$d_1^2 = 200 \text{ (reicht als Zwischenresultat)}$$

Raumdiagonale

$$d = \sqrt{14.14^2 + 15^2} = \mathbf{20.62 \text{ cm}}$$



1 Punkt für die Diagonale der Grundfläche oder für das Zwischenresultat $d_1^2 = 200$
1 Punkt für die Raumdiagonale

D. KONSTRUKTIONEN

▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.

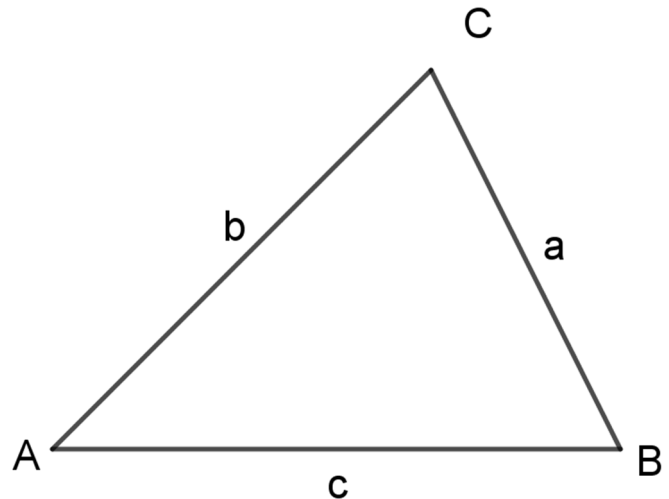
Die Konstruktionen müssen mit Zirkel und Lineal (bzw. Geodreieck) ausgeführt werden.

Es ist kein schriftlicher Konstruktionsbericht verlangt!

13. Konstruiere **die drei Winkelhalbierenden** im gegebenen Dreieck ABC.

(2 P/____P)

Keine Lösung → Lösungsfolie für die Korrektur!



1 Punkt für eine korrekt konstruierte Winkelhalbierenden w_a , w_b oder w_c .
1 Punkt für die Konstruktion der zweiten + dritten Winkelhalbierenden
0 Punkte falls die Winkelhalbierenden nicht konstruiert werden, sondern nur abgemessen sind.

14. Gegeben: Dreieck ABC mit der Seite $c = 8,5$ cm, der Schwerlinie (Seitenhalbierende) $S_c = 7$ cm und der Höhe $h_c = 4$ cm.

Gesucht: Konstruiere das Dreieck mit Zirkel, Geodreieck und Bleistift.
Falls sich mehrere Lösungen ergeben, sind alle Lösungen zu konstruieren.

(3P/____P)

Keine Lösung → Lösungsfolie für die Korrektur!

1 Punkt für das Höhenband, diese darf auch abgemessen werden
1 Punkt für die Konstruktion des ersten Dreiecks
1 Punkt für die Konstruktion des zweiten Dreiecks

E. GRÖSSEN, DATEN

▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.
Die Endresultate sind doppelt zu unterstreichen!

15. Rechne in die verlangten Einheiten um:

Notiere Deine Resultate in die Tabelle.

Beispiel →

	Verlangte Umrechnung	Resultat
1,5 Stunden	Stunden und Minuten	1 h 30 min
10^7 mm	km	10 km
$2,5 \cdot 10^{-2}$ kg	g	25 g
3 m/s	km/h	10,8 km/h
330 cl	dm ³	3,3 dm³

(4P/____P)

Je 1 Punkt pro richtig ausgefülltes Kästchen

16. Ein Schüler hat in sieben ganz zählenden Tests einen Notendurchschnitt von 4,2 erreicht. Es werden insgesamt acht Tests geschrieben.

- a) Welche Note muss er mindestens in seinem achten ganz zählenden Test erreichen, um eine 4,5 im Zeugnis zu erlangen (ab einem Notenschnitt von 4,25 erhält man die Zeugnisnote 4,5)?

$$4,25 \cdot 8 = 34,0$$

$$4,2 \cdot 7 = 29,4$$

$$34,0 - 29,4 = \underline{\underline{4,6}}$$

(1P/____P)

1 Punkt richtiges Resultat

- b) Der letzte Test zählt nur halb so viel wie die sieben vorherigen. Welche Note muss er mindestens erreichen, um eine 4,5 im Zeugnis zu erlangen (ab einem Notendurchschnitt von 4,25 erhält man die Zeugnisnote 4,5)?

$$4,25 \cdot 15 = 63,75$$

$$4,2 \cdot 14 = 58,8$$

$$63,75 - 58,8 = \underline{\underline{4.95}}$$

(1P/____P)

1 Punkt richtiges Resultat

F. FUNKTIONEN

▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.
Die Endresultate sind doppelt zu unterstreichen!

17. Funktionen

- a) Bestimme die Gleichung der Geraden g, welche durch die zwei Punkte A (2/ 30) und B (5 / 45) geht.

Steigung: $m = \frac{45-30}{5-2} = \frac{15}{3} = 5$

Einsetzen, um q zu bestimmen:

$$30 = 5 \cdot 2 + q \Rightarrow q = 20$$

$$y = 5x + 20$$

(3P/____P)

1 Punkt korrektes Anwenden der Formel für m
1 Punkt korrektes Einsetzen eines Punktes zur Berechnung von q
1 Punkt korrekte Formulierung der Geradengleichung

- b) Berechne den Schnittpunkt zwischen der Geraden f: $y = \frac{1}{2}x + 1,5$ und der Geraden h: $y = \frac{2}{3}x - 2$

(2P/____P)

$$\begin{aligned} y &= y \\ \frac{1}{2}x + 1,5 &= \frac{2}{3}x - 2 && | \cdot 6 \\ 3x + 9 &= 4x - 12 \\ 21 &= x && \mathbf{x = 21} \\ y &= \frac{1}{2} \cdot 21 + 1,5 && \mathbf{y = 12} \end{aligned}$$

S (21 / 12)

1 Punkt korrekter Ansatz $y = y$ und korrekter x-Wert
1 Punkt korrekter y-Wert

G. SACHRECHNEN / TEXTAUFGABEN ▷ Bewertung: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und vollständig sein.
Die Endresultate sind doppelt zu unterstreichen!

18. Auf der Erde leben etwa 8 Milliarden Menschen. Die Erde hat ca. 150 Millionen Quadratkilometer Landfläche.
Wie viel Land steht einem Menschen im Durchschnitt zur Verfügung?

Gib die Antwort in m^2 an.

$$\Rightarrow x = \frac{150 \text{ km}^2}{8000} = \frac{15}{800} = 0,01875$$

$$1000 \cdot 1000 \cdot 0,01875 = \underline{\underline{18'750 \text{ m}^2}}$$

(2P/____P)

1 Punkt richtiger Ansatz für Division (z.B. $\frac{150}{8}$)

1 Punkt Umrechnung in m^2

19. Man rechnet damit, dass ein Bergsteiger in der Stunde etwa 300 m hochsteigt.
Ein Bergsteiger macht sich um 7:00 Uhr morgens in Appenzell (778 m über Meer) auf den Weg zum Gipfel des Säntis (2464 müM). Er rastet unterwegs auf der Ebenalp 60 Minuten lang und geht dann weiter zum Gipfel des Säntis.

Um welche Uhrzeit wird er voraussichtlich auf dem Gipfel des Säntis oben ankommen?

zurückzulegende Höhe: 1686m

$$\frac{1686m}{300 \text{ m/h}} = 5,62 \text{ Stunden}$$

Total: 5,62 Stunden + 1 Stunde (Rastzeit)

Ankunft auf dem Säntis: 13:37

(2P/____P)

1 Punkt Ansatz Gesamthöhe durch 300m

1 Punkt Ankunftszeit