Lösung: Binärsystem

Zahlensysteme

Du kannst den Zahlentrick erklären, wenn du verstehst, wie Zahlensysteme funktionieren. Im Zehnersystem ordnest du einer Zahl automatisch den richtigen Wert zu: Die Zahl 327 im Zehnersystem bedeutet drei Hunderter plus zwei Zehner plus sieben Einer. Mit dem Lösen der nachfolgenden Aufgaben lernst du das Binärsystem (Zweiersystem), ein weiteres Zahlensystem, kennen.

Aufgabe 1

Wie würdest du Ausserirdischen, die das Zehnersystem nicht kennen, das Zehnersystem erklären? Überlege dir für die Antwort, welche Ziffern das Zehnersystem kennt.

→ **Tipp:** Lies nochmals den vorangehenden Abschnitt.

Das Zehnersystem kennt nur die Ziffern 0 bis und mit 9 …
Individuelle Antworten der Schülerinnen und Schüler.

Zehnersystem

Zehnerpotenzen

Die Zahlen 1, 10, 100, 1‘000, 10‘000 etc. lassen sich auch als *Zehnerpotenzen* darstellen. Die Potenzschreibweise kann folgendermassen hergeleitet werden:

1	Spezialfall	10^0
10 =	10 =	10^1
100 =	10·10 =	10^2
1‘000 =	10·10·10 =	10^3
10‘000 =	10·10·10·10 =	10^4
100‘000 =	*10·10·10·10·10 =*	10^5
1‘000‘000 =	*10·10·10·10·10·10 =*	10^6

Eine Zehnerpotenz besteht aus einer Basis (10) und dem Exponenten (die hochgestellte, klein geschriebene Zahl). 10^4 heisst in Worten «zehn hoch vier». Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor zu nehmen ist, oder anders gesagt: Der Exponent gibt im Zehner-system die Anzahl Nullen an.

Aufgabe 2

Potenzschreibweise: Fülle die beiden letzten Zeilen der vorangehenden Tabelle aus.

Aufgabe 3

Stelle die Zahl «fünfunddreissigtausendeinhunderteinundvierzig» mit Zehnerpotenzen und mit der Anzahl Einer, Zehner, Hunderter, Tausender etc. dar.

Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
30	5	*1*	*4*	1

Zwei Bedeutungen einer Ziffer innerhalb einer Zahl

Jede Ziffer hat aufgrund ihrer Form einen Ziffernwert (siehe Aufgabe 4).

Jede Ziffer hat aufgrund ihres Platzes einen Stellenwert (siehe Aufgabe 4).

Aufgabe 4

Mit dieser Aufgabe lernst du, den Ziffernwert und den Stellenwert einer Ziffer innerhalb der Zahl **4‘385** zu benennen. Fülle die leeren Zellen der Tabelle aus.

Ziffernwert	4	3	8	5
Stellenwert	$4 \cdot 10^3$ = 4‘000	*$3 \cdot 10^2$ = 300*	$8 \cdot 10^1$ = 80	*$5 \cdot 10^0$ = 5*

Aufgabe 5

Zerlege die Zahlen in Zehnerpotenzen.

5‘417 = $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

397 = $3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

205‘160 = *$2 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$*

Erfinde drei eigene Aufgaben (mit Lösungen) zum Zerlegen von Zahlen in Zehnerpotenzen. Eine Mitschülerin oder ein Mitschüler soll deine Aufgaben und Lösungen korrigieren.

Individuelle Lösungen der Schülerinnen und Schüler.

Aufgabe 6

Schreibe nachfolgende Terme in gewohnter Zahlendarstellung.

$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0$ = 3‘405

$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ = *2‘459*

$5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^0$ = *504‘007*

$9 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5$ = *99‘900‘000*

Binärsystem (Zweiersystem)

Mit dem Binärsystem (Zweiersystem) lernst du ein weiteres Zahlensystem kennen. Die einzigen möglichen Ziffern im Binärsystem sind 0 und 1. Du löst die nachfolgenden Aufgaben mit dem Lernziel, den Zahlentrick mit dem Binärsystem erklären zu können.

Vergleich von Zehnersystem und Zweiersystem

Zehnersystem					
Mögliche Ziffern: 0, 1, 2 … 9					
Stellen-werte	…	10^3	10^2	10	1
	…	1‘000	100	10	1
Beispiel		**6**	**0**	**0**	**5**
6005 =	$6 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$				
=	$6 \cdot 1'000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$				

Zweiersystem					
Mögliche Ziffern: **0, 1**					
Stellen-werte	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	16	8	4	2	1
Beispiel	0	**1**	**1**	**0**	**1**
1101_2 =	$1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$				
=	13_{10}				

Merke: Wir lesen z. B. 1101_2: «eins, eins, null, eins im Zweiersystem».

Aufgabe 7

Studiere die vorangehenden Tabellen zum Vergleich von Zehnersystem und Zweiersystem. Schreibe in eigenen Worten (in ganzen Sätzen) auf, worin sich diese beiden Zahlensysteme unterscheiden.

Das Zehnersystem funktioniert mit den Ziffern 0 bis 9, das Zweiersystem mit den Ziffern 0 und 1.
Bei der Zahlendarstellung im Zehnersystem ist 10 die Bündelungszahl, im Zweiersystem ist 2 die Bündelungszahl.
Anstatt 10er-Potenzen werden 2er-Potenzen für die verschiedenen Stellenwerte gebildet.

Aufgabe 8

Für das Zweiersystem braucht man also die Zweierpotenzen. Fülle die leeren Zellen aus.

2^0 =		= 1
2^1 =		= 2
2^2 =	$2 \cdot 2$	= 4
2^3 =	$2 \cdot 2 \cdot 2$	= 8
2^4 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	= 16
2^5 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	*= 32*
2^6 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	*= 64*
2^7 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	*= 128*
2^8 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	*= 256*
2^9 =	*$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$*	*= 512*

Aufgabe 9

Es gibt im Zweiersystem nur die Ziffern 0 und 1.

Nachfolgend werden die Zahlen von 0 bis 10 im Zweiersystem dargestellt.
Vervollständige die Tabelle.

Zehnersystem	**Umrechnung**	**Zweiersystem**
0 =	0	= **0**
1 =	$1 \cdot 2^0$	= **1**
2 =	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	= **10**
3 =	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	= **11**
4 =	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	= **100**
5 =	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	= **101**
6 =	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	= **110**
7 =	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	= ***111***
8 =	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	= ***1000***
9 =	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	= ***1001***
10 =	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	= ***1010***

Binär zählen

Aufgabe 10

Du lernst, mit den Fingern binär zu zählen. Der Daumen steht für die Einer, der Zeigefinger für die Zweier, der Mittelfinger für die Vierer etc.
Lisa hatte die Idee, die Zweierpotenzen auf die Finger zu schreiben (siehe Abbildung 1). Vielleicht hilft dir die Methode von Lisa, mit deinen Fingern binär zu zählen.

Wie weit kannst du mit einer Hand zählen? *1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31*

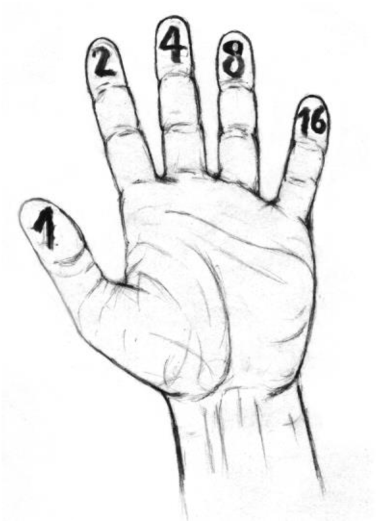

Abbildung 1: Idee von Lisa zum Binärzählen mit den Fingern. Die Finger sind mit Zweierpotenzen beschriftet.

David hatte eine andere Idee zur Aufgabe, mit den Fingern im Binärsystem zu zählen (siehe Abbildung 2).

Bevorzugst du die Idee von Lisa oder jene von David zum Binärzählen mit den Fingern? Diskutiere die beiden Ideen mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler.

Begründe deine Antwort schriftlich:
Individuelle Begründungen der Schülerinnen und Schüler.

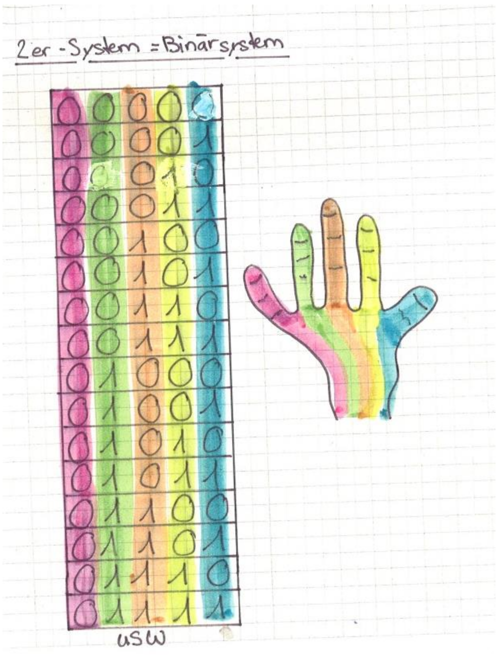

Abbildung 2: Idee von David zum Binärzählen mit den Fingern. Die Tabelle und die dazugehörigen farbigen Finger erleichtern das binäre Zählen mit den Fingern.

Umrechnen

Aufgabe 11

Umrechnen einer Zahl vom Zweiersystem ins Zehnersystem. Vervollständige die Tabelle.

10010_2 =	$1\cdot2^4$ +	$0\cdot2^3$ +	$0\cdot2^2$ +	$1\cdot2^1$ +	$0\cdot2^0$
	$1\cdot16$ +	$0\cdot8$ +	$0\cdot4$	$1\cdot2$	$0\cdot1$
18_{10} =	16 +	0 +	0 +	2 +	0

Aufgabe 12

Umrechnen einer Zahl vom Zehnersystem ins Zweiersystem. Vervollständige die Tabelle.

53_{10} =	$1\cdot32$ +	$1\cdot16$ +	$0\cdot8$ +	$1\cdot4$ +	$0\cdot2$ +	$1\cdot1$
	$1\cdot2^5$ +	$1\cdot2^4$ +	*$0\cdot2^3$ +*	*$1\cdot2^2$ +*	*$0\cdot2^1$ +*	$1\cdot2^0$
53_2 =	1	1	*0*	*1*	*0*	1

Aufgabe 13

Studiere nachfolgendes Beispiel für die Zahl 53. Rechne in der rechten Spalte die Zahl 75 vom Zehnersystem ins Zweiersystem um.

Beispiel	Aufgabe
$53 - 1\cdot32 = 21$ $21 - 1\cdot16 = 5$ $5 - 0\cdot8 = 5$ $5 - 1\cdot4 = 1$ $1 - 0\cdot2 = 1$ $1 - 1\cdot1 = 0$ $53 = 110101_2$	$75 - 1\cdot64 = 11$ *$11 - 0\cdot32 = 11$* *$11 - 0\cdot16 = 11$* *$11 - 1\cdot8 = 3$* *$3 - 0\cdot4 = 3$* *$3 - 1\cdot2 = 1$* *$1 - 1\cdot1 = 0$* *$75 = 1001011_2$*

Erklärung des Zahlentricks

Aufgabe 14

Mit den vorangehenden Aufgaben hast du ein Verständnis für Zahlensysteme entwickelt. Der Zahlentrick kann mit dem Zweiersystem erklärt werden.

a) Beschreibe in eigenen Worten die Durchführung für den Zahlentrick so genau, dass eine Person, die den Trick noch nicht kennt, den Zahlentrick durchführen könnte.

→ **Tipp:** Die wichtige Zahl auf einer Karte steht jeweils in der oberen linken Ecke.

b) Schreibe eine mathematische Erklärung für den Zahlentrick so genau auf, dass eine Person mit Kenntnissen zum Binärsystem den Zahlentrick verstehen kann.

→ **Tipp:** Die Zahlen in der oberen linken Ecke sind Zweierpotenzen.

c) Hole bei einer Mitschülerin/einem Mitschüler Rückmeldungen zu deinen Antworten ein. Verfeinere oder verbessere deine Antworten.

Lösungsvorschläge

a) *Jemand denkt sich eine Zahl zwischen 1 und 63 aus. Die Person gibt der Spielleiterin respektive dem Spielleiter alle Karten, welche die ausgewählte, gedachte Zahl enthalten. Nun müssen jeweils die ersten Zahlen (oben links) auf den Karten addiert werden. Die erhaltene Summe entspricht der gedachten Zahl.*

Beispiel: Die von der Mitspielerin respektive vom Mitspieler gedachte Zahl 7 ist auf drei Karten vertreten. Diese drei Karten übergibt die Mitspielerin/der Mitspieler der Spielleiterin/dem Spielleiter. Letztere/Letzterer zählt die ersten drei Zahlen (4, 2, 1) oben links auf den Karten zusammen. Die Summe ergibt 7. Mit diesem Trick kann die Spielleiterin/der Spielleiter die von der Mitspielerin respektive vom Mitspieler gedachte Zahl herausfinden.

b) *Der Zahlentrick kann damit erklärt werden, dass jede natürliche Zahl eindeutig als Summe einer Auswahl von Zweierpotenzen dargestellt werden kann.*

Beispiel zur Zahl 7:

$7 - \mathbf{1} \cdot 4 = 3$

$3 - \mathbf{1} \cdot 2 = 1$

$1 - \mathbf{1} \cdot 1 = 0$

7 = 4 + 2 + 1 (Karten mit den Zahlen 4, 2 und 1 in der oberen linken Ecke)

c) *Besprechung einiger Schülerinnen-/Schülerantworten im Klassenverband.*