

Zusatzmaterial 1: Zahlentrick mit Binärsystem



Das Zusatzmaterial 1 richtet sich an die Lehrperson.

Fachkenntnisse

Für eine kurze Erklärung klicken Sie auf den nachfolgenden Link:
<http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/binary/dhow.htm>

Lange Erklärung zum Zahlentrick für die Lehrperson

Analyse

- a) Die Karten beginnen alle mit Zweierpotenzen.

$$\begin{array}{lll} 8 = 2^3 & 4 = 2^2 & 16 = 2^4 \\ 32 = 2^5 & 2 = 2^1 & 1 = 2^0 \end{array}$$

(2^3 bedeutet «2 hoch 3» also «2·2·2» etc.)

Das kann kein Zufall sein. Addiert man diese 6 Zahlen, erhält man 63!

- b) Für den nächsten Schritt braucht es etwas Hintergrundwissen: Jede natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer Auswahl von Zweierpotenzen (1, 2, 4, 8, 16, 32 ...) dargestellt werden. Dazu einige Beispiele:

$$6 = 4 + 2$$

$$11 = 8 + 2 + 1$$

$$45 = 32 + 8 + 4 + 1$$

Diese Darstellung ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig. Dies hängt damit zusammen, dass eine Zweierpotenz nicht doppelt vorkommen darf; denn käme beispielsweise eine 8 doppelt vor, so könnte man sie durch eine 16 ersetzen (und würde die auch schon vorkommen, durch eine 32 etc.).

- c) Die höchste überhaupt auftretende Zahl ist 63. Nun sind Informatikerinnen respektive Informatiker darin geschult, Zahlen als Potenzen zur Basis 2 zu betrachten. 63 ist zwar keine ganzzahlige Potenz von 2, aber bei 64 ist dies der Fall. Es gilt nämlich $64 = 2^6$. Dieser Zusammenhang wirkt auf den ersten Blick etwas konstruiert, bekommt aber Gewicht, wenn man die Anzahl der Karten zählt: 6.
- d) Bei 6 Karten ist die grösste darstellbare Zahl $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Man rechnet leicht nach, dass die Summe der ersten «n» Zweierpotenzen immer $2^n - 1$ ergibt ($2^6 - 1 = 63$). Auf diese Weise lässt sich beispielsweise direkt angeben, dass mit 7 Karten ein Spiel mit maximal $2^7 - 1 = 127$ Zahlen konstruiert werden kann.

Synthese

- e) Um das Problem besser zu verstehen, kann man es «reduzieren»; man versucht, ein ähnliches Spiel zu konstruieren, das mit weniger Zahlen und weniger Karten auskommt. Eine Konstruktion hat zudem den Vorteil, dass man dabei gezwungen wird, die Struktur des Spiels zu verstehen.

Damit die Aufgabe nicht zu simpel (eine Karte mit einer Zahl) und damit auch wieder un-durchschaubar wird, nehmen wir die ersten drei Zweierpotenzen $A = 1$, $B = 2$ und $C = 4$. Daraus müsste man nach dem obigen Gesagten ein Spiel mit drei Karten machen können. Die Buchstaben dienen dazu, die Zahlen auf den Karten und die Nummer der jeweiligen Karten besser unterscheiden zu können. Nun bilden wir aus $A = 1$, $B = 2$ und $C = 4$ alle möglichen Zahlen:

$$\begin{aligned}1 &= A \\2 &= B \\3 &= A + B \\4 &= C \\5 &= A + C \\6 &= B + C \\7 &= A + B + C\end{aligned}$$

- Nennen wir unsere Karten A, B und C und setzen wir jeweils die «reine» Zweierpotenz 1, 2 und 4 an den Anfang dieser Karten, so erhalten wir:

Karte A	Karte B	Karte C
1	2	4

- Nun verteilen wir die übrigen Zahlen aufgrund ihres «Darstellungscodes» auf die drei Karten. Die Zahl 3 gehört daher gemäss obiger Summen auf die Karten A und B:

Karte A	Karte B	Karte C
1 3	2 3	4

- So fährt man fort, bis alle Zahlen auf die Karten verteilt sind:

Karte A	Karte B	Karte C
1 3 5 7	2 3 6 7	4 5 6 7

- Nun wundert man sich auch nicht mehr, warum die 7 auf allen drei Karten vertreten ist: Je grösser eine Zahl, desto mehr Zweierpotenzen benötigt man für sie.

- f) Übungsaufgabe als Erweiterungsmöglichkeit für die Schülerinnen und Schüler: Stelle auf die gleiche Weise ein Spiel für 4, 5 oder sogar 7 Karten her. Da es ausser bei der ersten Zahl nicht auf die Reihenfolge ankommt, können die hinter den Zweierpotenzen stehenden Zahlen auch vertauscht werden. Um noch mehr «Verwirrung» zu stiften, kann man auch Zahlen weglassen.